



05-4506832



pustaka.upsi.edu.my



Perpustakaan Tuanku Bainun  
Kampus Sultan Abdul Jalil Shah



PustakaTBainun



ptbupsi

PENYELESAIAN SEMI ANALISIS PERSAMAAN  
PEMBEZAAN SEPARA ELIPTIK  
MENGUNAKAN KAEDAH  
GARIS LIMA TITIK



05-4506832



pustaka.upsi.edu.my



Perpustakaan Tuanku Bainun  
Kampus Sultan Abdul Jalil Shah



PustakaTBainun



ptbupsi

SAIDATUN NISA BINTI KAMARUDDIN

UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA



05-4506832



pustaka.upsi.edu.my



Perpustakaan Tuanku Bainun  
Kampus Sultan Abdul Jalil Shah



PustakaTBainun



ptbupsi



05-4506832



pustaka.upsi.edu.my



Perpustakaan Tuanku Bainun  
Kampus Sultan Abdul Jalil Shah



PustakaTBainun



ptbupsi

PENYELESAIAN SEMI ANALISIS PERSAMAAN PEMBEZAAN  
SEPARA ELIPTIK MENGGUNAKAN KAEDAH  
GARIS LIMA TITIK

SAIDATUN NISA BINTI KAMARUDDIN



05-4506832



pustaka.upsi.edu.my



Perpustakaan Tuanku Bainun  
Kampus Sultan Abdul Jalil Shah



PustakaTBainun



ptbupsi

PROJEK PENYELIDIKAN YANG DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI  
SEBAHAGIAN DARIPADA SYARAT MEMPEROLEH IJAZAH  
SARJANA SAINS

FAKULTI SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA  
BANGI

2012



05-4506832



pustaka.upsi.edu.my



Perpustakaan Tuanku Bainun  
Kampus Sultan Abdul Jalil Shah



PustakaTBainun



ptbupsi



## PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang tiap-tiap satunya telah saya jelaskan sumbernya.



8 Ogos 2012

SAIDATUN NISA BINTI KAMARUDDIN  
P51625





## PENGHARGAAN

Dengan nama Allah Yang Maha Pemurah lagi Maha Penyayang. Syukur Alhamdulillah kepada Allah S.W.T kerana dengan limpah kurniaNya saya dapat menyempurnakan projek penyelidikan ini sekaligus menamatkan program pengajian sarjana saya. Setinggi-tinggi penghargaan dan terima kasih ditujukan kepada penyelia saya, Prof Madya Dr. Rokiah @ Rozita Ahmad yang telah banyak memberi panduan, bimbingan, tunjuk ajar serta nasihat berguna dalam menghasilkan sebuah tesis yang sempurna. Tidak lupa juga kepada pensyarah-pensyarah lain yang sedikit sebanyak turut menyumbangkan pendapat dan bantuan dalam proses pelaksanaan tesis ini.

Di samping itu, ucapan terima kasih ini turut ditujukan kepada rakan-rakan Sarjana Sains (Matematik), para pensyarah dan staf-staf di Pusat Pengajian Sains Matematik di Universiti Kebangsaan Malaysia yang turut sama membantu dan memberi kerjasama sama ada secara langsung atau tidak langsung sepanjang penyelidikan ini.

Sekalung penghargaan dan jutaan terima kasih yang tidak terhingga juga diucapkan kepada ayahanda dan bonda tercinta: Kamaruddin Katib Baginda dan Mariatul Kibtiah Abdul Majib, ibu bapa mertua: Abd. Jalil Abd. Rahaman serta Zaitun Mohd Nor kerana mereka semua telah memberikan sokongan kepada saya sama ada dari segi mental, iringan doa mahupun kewangan.



Akhir sekali, tidak lupa juga buat suami tercinta iaitu Mohamad Hazrul bin Abd. Jalil yang sering memberi semangat dan galakan yang tidak putus kepada saya ketika menyiapkan tesis ini dan juga buat anakanda tersayang Aufa binti Mohamad Hazrul. Segala pengorbanan dan jasa kalian tidak akan dilupakan dan dikenang hingga ke akhir hayat.

Sekian, terima kasih.





## ABSTRAK

Kajian ini memfokuskan kepada kaedah garis iaitu suatu kaedah yang bertujuan untuk mendiskretkan persamaan pembezaan separa (PPS) supaya PPS tersebut dapat diturunkan kepada satu sistem pembezaan biasa (PPB). Dalam kajian ini persamaan pembezaan separa Eliptik iaitu persamaan Laplace telah didiskretkan untuk menghasilkan satu sistem PPB. Pendiskretan dilakukan dengan menggunakan penghampiran beza sehingga lima titik yang diterbitkan oleh siri Taylor. Sistem PPB kemudiannya diselesaikan dengan menggunakan kaedah matriks eksponen. Persamaan Laplace adalah satu jenis daripada PPS eliptik yang menunjukkan taburan haba dalam keadaan mantap. Dua contoh persamaan Laplace diselesaikan menggunakan kaedah garis dan matriks eksponen. Hasil penyelesaian masalah ini merupakan satu penyelesaian semi analisis. Plot bagi taburan suhu menunjukkan ianya bersifat simetri.





## **SOLVING ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION USING FIVE POINTS SEMIANALYTICAL METHOD OF LINE**

### **ABSTRACT**

This research is focused on the method of lines (MOL) which is a method that discretize partial differential equation (PDE) so that the PDE can be transformed into a system of ordinary differential equation (ODE). In this research, PDE elliptic which is Laplace equation was discretized to get a system of ODE. Discretization is done using five-point finite difference approximation from Taylor series. System of ODE then solved using matrix exponential method. Laplace equation is an elliptic PDE that shows the distribution of heat in steady state. Here, two examples of Laplace equation were solved by the method of lines and matrix exponential. The results of this solution is a semi-analytical solution. Plot of the temperature distribution shows that it is symmetric.



## KANDUNGAN

|                                                                    | Halaman |
|--------------------------------------------------------------------|---------|
| <b>PENGAKUAN</b>                                                   | ii      |
| <b>PENGHARGAAN</b>                                                 | iii     |
| <b>ABSTRAK</b>                                                     | iv      |
| <b>ABSTRACT</b>                                                    | v       |
| <b>KANDUNGAN</b>                                                   | vi      |
| <b>SENARAI JADUAL</b>                                              | viii    |
| <b>SENARAI ILUSTRASI</b>                                           | ix      |
| <b>SENARAI SIMBOL</b>                                              | x       |
| <b>SENARAI SINGKATAN</b>                                           | xi      |
| <br>                                                               |         |
| <b>BAB I PENDAHULUAN</b>                                           |         |
| 1.1 Pengenalan                                                     | 1       |
| 1.2 Persamaan Pembezaan Separa dan Syarat Sempadan                 | 2       |
| 1.3 Objektif Kajian                                                | 5       |
| 1.4 Rangka Kajian                                                  | 5       |
| <br>                                                               |         |
| <b>BAB II ULASAN KEPUSTAKAAN</b>                                   |         |
| 2.1 Pengenalan                                                     | 7       |
| 2.2 Idea Asas Kaedah Garis                                         | 7       |
| 2.3 Pendiskretan PPS                                               | 7       |
| 2.3.1 Penghampiran beza terhingga                                  | 8       |
| 2.3.2 Beza terhingga ke depan, ke belakang dan memusat             | 9       |
| 2.3.3 Beza terhingga memusat tertib kedua                          | 13      |
| 2.4 Penumpuan Kaedah Garis                                         | 15      |
| 2.5 Kaedah Garis 3, 5 dan 7 Titik Terhadap PPS                     | 16      |
| <br>                                                               |         |
| <b>BAB III KAEDAH GARIS LIMA TITIK DAN KAEDAH MATRIKS EKSPONEN</b> |         |
| 3.1 Pengenalan                                                     | 18      |

|     |                                      |    |
|-----|--------------------------------------|----|
| 3.2 | Persamaan Laplace                    | 18 |
| 3.3 | Kaedah Garis Lima Titik              | 20 |
| 3.4 | Kaedah Matriks Eksponen              | 22 |
| 3.5 | Penyelesaian Tepat Persamaan Laplace | 25 |

#### **BAB IV      PENYELESAIAN SEMI ANALISIS**

|       |                                                                                                     |    |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1   | Pengenalan                                                                                          | 30 |
| 4.2   | Pendiskretan Persamaan Laplace Menggunakan Kaedah Garis Lima Titik                                  | 30 |
| 4.3   | Penggunaan Kaedah Matriks Eksponen                                                                  | 33 |
| 4.4   | Analisis Penggunaan Kaedah Garis Lima Titik dan Kaedah Matriks Eksponen Terhadap Persamaan Laplace. | 35 |
| 4.4.1 | Persamaan Laplace linear dengan masalah sempadan Dirichlet                                          | 35 |
| 4.4.2 | Persamaan Laplace linear dengan masalah sempadan Neumann                                            | 41 |
| 4.5   | Perbandingan Taburan Suhu bagi Kaedah Garis Tiga Titik dan Lima Titik                               | 45 |

#### **BAB V      KESIMPULAN**

|     |                          |    |
|-----|--------------------------|----|
| 5.1 | Pengenalan               | 47 |
| 5.2 | Kesimpulan Kajian        | 45 |
| 5.3 | Cadangan Kajian Lanjutan | 48 |

|                |    |
|----------------|----|
| <b>RUJUKAN</b> | 50 |
|----------------|----|

#### **LAMPIRAN**

|   |                                           |    |
|---|-------------------------------------------|----|
| A | Aturcara Maple bagi penyelesaian Contoh 1 | 52 |
| B | Aturcara Maple bagi penyelesaian Contoh 2 | 55 |



## SENARAI JADUAL

| No. Jadual |                                                                                                                 | Halaman |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 2.1        | Rumus beza sehingga ke depan, ke belakang dan memusat tertib pertama                                            | 12      |
| 2.2        | Rumus beza sehingga ke depan, ke belakang dan memusat tertib pertama dan tertib kedua bagi penghampiran 5 titik | 14      |
| 4.1        | Ralat relatif taburan suhu menggunakan kaedah garis lima titik dan tiga titik                                   | 46      |





## SENARAI ILUSTRASI

| No. Rajah |                                                                             | Halaman |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------|---------|
| 2.1       | Pembahagian domain kepada petak-petak segi empat kecil                      | 9       |
| 2.2       | Penghampiran beza terhingga bagi pembezaan                                  | 13      |
| 3.1       | Plat nipis yang berketebalan $\Delta z$ dengan suhu di sempadan             | 18      |
| 3.2       | Taburan suhu persamaan Laplace dengan syarat sempadan                       | 24      |
| 4.1       | Taburan suhu $u_n(y)$ bagi contoh 1 ( $N = 2$ )                             | 40      |
| 4.2       | Plot taburan suhu 'u' terhadap 'x' untuk contoh 1 ( $N = 2$ )               | 40      |
| 4.3       | Plot taburan suhu 'u' terhadap 'x' untuk contoh 1 ( $N = 10$ )              | 41      |
| 4.4       | Taburan suhu contoh 1 dalam plot 3-matra ( $\varepsilon = H/L = 1, N = 2$ ) | 42      |
| 4.5       | Taburan suhu $u_n(y)$ bagi contoh 2 ( $N = 2$ )                             | 44      |
| 4.6       | Plot taburan suhu 'u' terhadap 'x' bagi contoh 2                            | 44      |
| 4.7       | Taburan suhu contoh 1 dalam plot 3-matra ( $\varepsilon = H/L = 1, N = 2$ ) | 45      |





## SENARAI SIMBOL

|               |                                            |
|---------------|--------------------------------------------|
| <b>A</b>      | pekali matriks                             |
| $c_i$         | pemalar anu tidak berdimensi               |
| $h$           | saiz langkah dalam arah- $x$               |
| $H$           | tinggi bagi plat segi empat tepat          |
| $L$           | panjang bagi plat segi empat tepat         |
| $N$           | jumlah bilangan titik nod                  |
| $u$           | suhu tidak berdimensi                      |
| <b>Y</b>      | pembolehubah bersandar dalam bentuk vektor |
| $\varepsilon$ | nisbah H/L                                 |
| $\zeta$       | zeta – ordinat $y$ tidak berdimensi        |
| $\lambda$     | pemboleh ubah patung                       |
| $i$           | indeks titik nod                           |





05-4506832



pustaka.upsi.edu.my



Perpustakaan Tuanku Bainun  
Kampus Sultan Abdul Jalil Shah



PustakaTBainun



ptbupsi  
xi

## SENARAI SINGKATAN

PPS

Persamaan Pembezaan Separa

PPB

Persamaan Pembezaan Biasa



05-4506832



pustaka.upsi.edu.my



Perpustakaan Tuanku Bainun  
Kampus Sultan Abdul Jalil Shah



PustakaTBainun



ptbupsi



05-4506832



pustaka.upsi.edu.my



Perpustakaan Tuanku Bainun  
Kampus Sultan Abdul Jalil Shah



PustakaTBainun



ptbupsi



## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 PENGENALAN

Kaedah garis adalah kes istimewa bagi skema pembezaan-penghampiran. Dalam kaedah ini dibincangkan tentang kewujudan, keunikan dan penyelesaian masalah persamaan pembezaan separa (PPS). Ianya merupakan teknik berangka ataupun lebih kepada kaedah semi analisis untuk analisis pemancaran garis-garis, struktur kawalan gelombang, dan dalam permasalahan serakan. Kaedah ini pada mulanya diperkenalkan oleh ahli matematik dan digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai sempadan dalam bidang fizik seperti elektromagnetik. Namun kini, ahli matematik yang aktif mengkaji kaedah garis ialah Schiesser dari Universiti Lehigh, Pennsylvania (Pregla 1989).

Menurut Sadiku dan Obiozor (2000), kaedah garis telah menjadi alat piawai yang digunakan untuk menyelesaikan masalah elektromagnetik yang kompleks. Dengan menggunakan kaedah penghampiran beza terhingga, ia lebih berkesan terhadap ketepatan menggunakan pengiraan masa. Pada asasnya, kaedah garis melibatkan pendiskretan persamaan satu atau dua dimensi dan arah koordinat yang tidak didiskretkan perlu diselesaikan dengan menggunakan penyelesaian analisis (Sadiku & Obiozor 2000).

Tambahan lagi, ramai penyelidik telah membuktikan keberkesanan kaedah garis sebagai suatu alat matematik yang hebat dalam menyelesaikan masalah pembezaan separa. Ini selaras dengan pendapat Schiesser (1991) dan Sadiku dan





Obiozor (2000) yang menyatakan bahawa di antara kelebihan dan keistimewaan yang terdapat dalam kaedah garis ialah:

- a) kecekapan dalam pengiraan: alkhwarizminya yang mudah akan mempercepatkan pengiraan dan menghasilkan penyelesaian yang lebih jitu walaupun kurang pengiraan berbanding teknik lain.
- b) kestabilan berangka: dengan memisahkan pendiskretan ruang dan masa, kestabilan dan penumpuan lebih mudah diperoleh bagi pelbagai masalah.
- c) mengurangkan pengiraan dalam pengaturcaraan: boleh menggunakan pengaturcaraan yang sesuai untuk menyelesaikan persamaan pembezaan biasa (PPB) kerana PPS telah didiskretkan kepada sistem PPB.
- d) menjimatkan masa pengiraan: jumlah pendiskretan garis yang digunakan adalah kurang, maka tidak perlu untuk menyelesaikan sistem persamaan yang besar dan kompleks. Oleh yang demikian, masa pengiraan juga akan berkurang.



Untuk menggunakan kaedah garis, lima langkah asas harus diambil, iaitu:

- 1) Pemetakan jawapan ke dalam bentuk lapisan-lapisan.
- 2) PPS mestilah didiskretkan pada satu arah koordinat sahaja.
- 3) PPS tersebut diturunkan kepada sistem PPB.
- 4) Songsangan bagi transformasi diselesaikan dan syarat sempadan diperkenalkan.
- 5) Penyelesaian bagi persamaan diperoleh.

## 1.2 PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA DAN SYARAT SEMPADAN

Kebanyakan fenomena fizikal boleh diperihalkan secara umum oleh persamaan pembezaan separa (PPS). Ini termasuklah bidang sains dan kejuruteraan seperti mekanik bendalir, elektrik, elektromagnetik, optik, pengaliran haba dan lain-lain lagi. PPS adalah persamaan yang mengandungi satu atau lebih daripada satu terbitan separa. PPS boleh mempunyai penyelesaian yang melibatkan fungsi sebarang dan penyelesaiannya melibatkan bilangan pemalar yang tak terhad. Penyelesaian am suatu





persamaan pembezaan separa linear peringkat  $n$  mungkin melibatkan  $n$  fungsi sebarang (Rainville & Bedient 1990).

PPS linear peringkat kedua dengan pemboleh ubah tak bersandar  $x$  dan  $y$  adalah berbentuk,

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial U}{\partial y} + FU = G, \quad (1.1)$$

dengan  $A, B, C, D, E, F$  dan  $G$  adalah sebarang ungkapan dalam  $x$  dan  $y$ . Jika  $G = 0$  persamaan dikatakan homogen dan sebaliknya. Jika kesemua  $A, B, C, D, E$  dan  $F$  pemalar, maka persamaan pembezaan separa tersebut dikatakan persamaan pembezaan separa dengan pekali malar. Sebaliknya jika satu daripada  $A, B, C, D, E$  atau  $F$  merupakan suatu pemboleh ubah, maka persamaan tersebut dinamai PPS dengan pekali pemboleh ubah. Persamaan pembezaan separa boleh diungkap dalam bentuk am seperti berikut:



$$F \left( x, y, u, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}, \dots \right) = 0. \quad (1.2)$$

Persamaan pembezaan separa terbahagi kepada dua iaitu linear ataupun tak linear. Persamaan (1.1) dikatakan linear jika pemboleh ubah bersandar  $U$  dan semua terbitannya adalah linear iaitu berdarjah satu, misalnya pemboleh ubah bersandar  $U$  dan semua terbitannya bebas daripada  $U$  dan tidak dikuasaduakan. Kebanyakan masalah fizikal diwakili oleh persamaan pembezaan separa peringkat dua yang linear dengan pemboleh ubah tak bersandar iaitu  $x$  dan  $y$  seperti berikut:

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + \\ E(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} + F(x, y) U = G, \end{aligned} \quad (1.3)$$





dengan  $A, B, C, D, E, F$  dan  $G$  adalah pemalar ataupun fungsi yang bebas daripada  $U$ . Persamaan (1.3) boleh dikelaskan kepada tiga jenis persamaan linear asas iaitu,

- Persamaan pembezaan separa hiperbolik
- Persamaan pembezaan separa parabolik
- Persamaan pembezaan separa eliptik

Jenis persamaan (1.3) sama ada eliptik, parabolik atau hiperbolik hanya bergantung pada pekali terbitan kedua dan langsung tidak ada kaitan dengan pekali terbitan pertama,  $u$  atau pekali tak homogen ( $G(x, y) \neq 0$ ).

Fokus persamaan dalam kajian ini adalah persamaan eliptik dengan syarat  $B^2 - 4AC < 0$ . Terdapat dua jenis persamaan eliptik iaitu:

- persamaan Laplace,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

- persamaan Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y).$$

Penyelesaian am bagi persamaan pembezaan separa melibatkan fungsi sebarang iaitu terdapat penyelesaian tak terhingga, dan penyelesaian khusus hanya boleh diperoleh dengan adanya syarat sempadan. Secara amnya, terdapat tiga bentuk utama bagi syarat sempadan iaitu,

- Syarat sempadan Dirichlet yang nilai-nilai fungsi  $u$  yang tidak diketahui itu akan diberikan bagi semua titik pada sempadan domain.

$$u(0, t) = K_1,$$

$$u(L, t) = K_2.$$

- Syarat sempadan Neumann yang nilai-nilai terbitan normal bagi fungsi  $u$  akan diberikan pada sempadan domain.

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = K_1,$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = K_2.$$





- c) Syarat sempadan Robins merupakan campuran syarat sempadan Dirichlet dan syarat sempadan Neumann yang nilai-nilai fungsi  $u$  dan terbitan normalnya akan diberikan pada sempadan domain.

$$\alpha_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta_1 u(0,t) = K_1, \quad \alpha_2 \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + \beta_2 u(L,t) = K_2.$$

- d) Syarat awal Cauchy yang nilai-nilai fungsi  $u$  dan terbitannya akan diberikan pada masa awal,  $t=0$ .

$$u(x,0) = K_1, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = K_2.$$

Fokus utama kajian ini adalah untuk menyelesaikan PPS eliptik iaitu persamaan Laplace beserta syarat sempadan Dirichlet dan Robins.

### 1.3 OBJEKTIF KAJIAN



Kajian yang dijalankan difokuskan kepada beberapa tujuan iaitu:

- i) menurunkan PPS eliptik iaitu persamaan Laplace kepada sistem PPB peringkat pertama dengan menggunakan kaedah garis lima titik.
- ii) menyelesaikan sistem PPB menggunakan kaedah matriks eksponen.
- iii) membandingkan ralat yang diperoleh daripada kaedah garis lima titik dan kaedah garis tiga titik.

### 1.4 RANGKA KAJIAN

Projek penyelidikan ini mempunyai empat bab dengan skop kajian merangkumi penggunaan kaedah garis terhadap PPS eliptik. Bab I mengandungi pendahuluan yang menerangkan pengenalan secara umum tentang kaedah garis dan persamaan pembezaan separa. Jenis- jenis persamaan pembezaan separa (PPS) juga diterangkan dalam bab ini serta masalah nilai awal serta masalah nilai sempadan yang perlu





dipertimbangkan untuk menyelesaikan PPS. Akhir sekali, objektif dan rangka kajian dibincangkan dalam Bab I.

Bab II pula merupakan ulasan kepustakaan daripada kajian-kajian lepas yang telah dilakukan ke atas kaedah garis terhadap persamaan pembezaan separa yang lain contohnya persamaan pembezaan separa parabolik, hiperbolik, Helmholtz, Laplace dan lain-lain lagi. Selain itu, kajian lepas mengenai kaedah garis yang menggunakan bezaan terhingga memusat bagi titik  $n$  yang  $n=3$  dan  $5$  dibincangkan dalam bab ini.

Dalam Bab III, kaedah-kaedah yang digunakan dalam kajian ini dibincangkan. Beza terhingga memusat lima titik digunakan dalam persamaan Laplace supaya satu sistem PPB diterbitkan. Selain itu, kaedah matriks eksponen turut dibincangkan untuk menyelesaikan masalah sistem PPB supaya satu penyelesaian semi analisis dihasilkan.

Dalam Bab 1V dua contoh persamaan pembezaan separa eliptik diselesaikan menggunakan kaedah-kaedah yang dibincangkan dalam Bab III. Penyelesaian PPS eliptik iaitu persamaan Laplace akan diturunkan menggunakan kaedah garis lima titik dan kemudiannya diselesaikan menggunakan kaedah matriks eksponen yang melibatkan penggunaan perisian Maple 12. Hasil penyelesaian merupakan satu penyelesaian semi analisis.

Bab V merupakan kesimpulan bagi keseluruhan kajian yang dijalankan dalam projek penyelidikan ini. Beberapa cadangan terhadap kajian-kajian akan datang yang berkaitan juga disertakan.

