MASALAH PERKATAAN UNTUK KUMPULAN TOCANG: SUATU SOROTAN

NOR SURIYA BINTI ABD KARIM

DISERTASI YANG DIKEMUKAKAN UNTUK MEMENUHI SEBAHAGIAN
DARIPADA SYARAT MEMPEROLEH IJAZAH
SARJANA SAINS

FAKULTI SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA
BANGI

2011

PENGAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang tiap-tiap satunya telah saya jelaskan sumbernya.

19 Mei 2011

NOR SURIYA BINTI ABD KARIM
P53797

PENGHARGAAN

Alhamdulillah, saya bersyukur kepada Allah kerana dengan limpah kurnianya saya dapat melakukan dan menyempurnakan projek penyelidikan ini. Saya bersyukur kerana saya diberikan kesihatan yang baik, masa yang mencukupi sepanjang proses untuk menyelesaikan projek penyelidikan ini.

Jutaan terima kasih saya ucapkan kepada Prof. Madya Dr. Abd Ghafur Ahmad selaku penyelia saya atas bantuan beliau yang begitu banyak kerana sudi membimbing, menegur kesilapan, dan juga memberikan segala nasihat yang berguna yang membantu saya di dalam perlaksanaan projek penyelidikan ini. Seterusnya ribuan terima kasih saya ucapkan kepada semua pensyarah di Pusat Pengajian Matematik ini di atas segala ilmu dan tunjuk ajar yang diberikan kepada saya sepanjang saya berada di Universiti Kebangsaan Malaysia ini.

Terima kasih tak terhingga juga saya ucapkan kepada semua kakitangan di Fakulti Sains dan Teknologi umumnya dan kakitangan di Pusat Pengajian Sains Matematik khususnya kerana membantu saya secara langsung dan tidak langsung di sepanjang pengajian saya di sini. Terima kasih juga saya ucapkan kepada kakitangan Perpustakaan Tun Sri Lanang atas segala kerjasama dan bantuan yang diberikan dalam segala bentuk terutamanya dalam penyediaan bahan-bahan rujukan yang saya perlukan.

Ribuan terima kasih saya ucapkan kepada Universiti Pendidikan Sultan Idris dan Kementerian Pengajian Tinggi yang banyak membantu saya dari segi kewangan melalui Skim Latihan Akademik Bumiputera sepanjang pengajian dan proses kajian ini.

Seterusnya terima kasih tak terhingga saya ucapkan kepada kedua ibu dan bapa serta ahli keluarga atas semangat dan kepercayaan yang diberikan kepada saya selama ini. Tidak lupa juga kepada rakan-rakan yang sudi berkongsi ilmu, nasihat, pengalaman serta memberikan semangat dan sokongan moral secara langsung dan tidak langsung, terima kasih saya ucapkan. Terima kasih.

ABSTRAK

Projek penyelidikan ini dijalankan bagi menyorot kajian-kajian yang telah dijalankan mengenai masalah perkataan dalam kumpulan tocang. Kajian berkaitan dua jenis kaedah penyelesaian diperlihatkan, iaitu kajian menggunakan bentuk normal dan juga kaedah tidak menggunakan bentuk normal atau lebih dikenali sebagai kaedah langsung. Kaedah pertama menumpukan kepada kajian yang menggunakan bentuk normal yang diperkenalkan oleh Garside dan juga satu kajian lain (Birman, Ko dan Lee) yang memperkenalkan bentuk normal yang baru. Untuk kaedah kedua ini kajian yang diteliti adalah berdasarkan penggunaan kumpulan asasi untuk menyelesaikan masalah ini. Pembuktian untuk teorem utama bagi kajian Birman, Ko dan Lee diperjelaskan. Seterusnya, contoh kepada penggunaan alkhwarizmi berdasarkan kepada penggunaan kumpulan asasi diberikan.

THE WORD PROBLEM IN BRAID GROUPS: A REVIEW

ABSTRACT

This research project was conducted in order to review the researches concerning word problem in braid group. Researches on two methods had been shown in this research project. The methods are based-on normal form method while the other one is not based-on normal form which is also known as direct method. The first method discussed about two research paper. The first paper was about a research which used normal form introduced by Garside as its solution and another research conducted by Birman, Ko and Lee gave a new normal form. The latter method use fundamental group in order to solve this problem. The incompleteness in the proof for the main theorem used in the algorithm introduced by Birman, Ko and Lee is fully equipped. Further, an example of the usage of algorithm introduced using fundamental group given in the latter chapter.

KANDUNGAN

SENARAI ILUSTRASI

BAB I

PENGENALAN KEPADA KUMPULAN TOCANG DAN MASALAH PERKATAAN

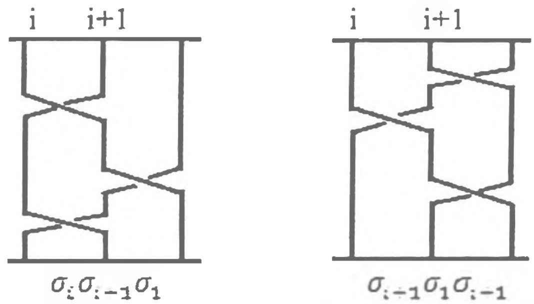
1.1 PENDAHULUAN

Bab ini memberikan pengenalan kepada para pembaca mengenai kumpulan tocang dan masalah perkataan. Takrif dan ciri-ciri kumpulan tocang serta perkataan diterangkan terlebih dahulu sebelum pernyataan masalah tocang diterangkan di penghujung bab ini.

1.2 TOCANG

Kegunaan kumpulan tocang tidak terhad kepada bidang matematik sahaja, malahan juga kepada bidang lain seperti fizik dan kriptografi, misalnya seperti penggunaan kumpulan tocang dalam mekanik klasik dan teori medan kuantum bagi bidang fizik (Prasolov & Sossinsky 1997), dan juga alkhwarizmi enkripsi kunci awam bagi bidang kriptografi. Menurut Kassel & Turaev (2008), kumpulan tocang muncul pertama kalinya (tidak secara jelas) oleh Adolf Hurtwiz melalui artikel yang ditulis beliau pada tahun 1891. Kemudian, kumpulan tocang diperkenalkan oleh Emil Artin pada tahun 1920-an (Artin 1947). Selain itu, Prasolov & Sossinsky (1997) turut menambah, pada awalnya Artin mencipta kumpulan tocang sebagai satu model matematik untuk digunakan di dalam industri tekstil. Walaubagaimanapun, Artin telah menemui yang tocang dengan n bilangan jalinan dinamai kumpulan tocang ke-n dan disimbolkan dengan B_n. Dengan adanya penemuan oleh Artin, ahli-ahli topologi dan aljabar telah menunjukkan minat dan kecenderungan mereka untuk menjalankan kajian mengenai kumpulan tocang(Prasolov & Sossinsky 1997). Oleh itu, sehingga ke hari ini banyak penemuan baru mengenai mengenai kumpulan tocang telah ditemui dan mungkin masih banyak lagi kajian yang sedang dan akan dijalankan.

Secara ringkasnya, gambaran bagi tocang adalah seperti jalinan rambut. Ianya boleh dilihat seperti Rajah 1.1 di bawah,



Rajah 1.1 Tocang-3

Sumber: Manfredini 1997

Tocang-n atau tocang yang terdiri daripada n bilangan jalinan ditakrifkan sebagai satu set garisan poligon menaik yang berpasangan dan tidak bersilang dengan jalinan-jalinan yang menghubungkan titik-titik $A_1,...,A_n$ ke titik-titik $B_1,...,B_n$ mengikut tertibnya (Prasolov & Sossinsky 1997).

Secara umumnya, andaikan n suatu integer positif. Moran (1983) memberi takrif tocang-n atau tocang yang terdiri daripada n bilangan jalinan adalah seperti berikut;

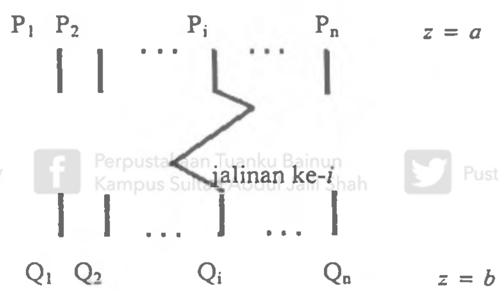
i. Titik-titik $P_1, P_2, ..., P_n$ di dalam $\mathbf{R}^3$ terletak pada koordinat-z yang sama, misalan $z = a$, dan koordinat-x semakin menaik dari P_i ke P_{i+1}, iaitu nilai P_i lebih kecil daripada nilai P_{i+1} ($P_i < P_{i+1}$) sepanjang tembereng garis P_iP_{i+1} bagi setiap *i*.

ii. Titik-titik $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ di dalam $\mathbf{R}^3$ terletak pada koordinat-z yang sama, misalan $z = b$, dan koordinat-x menaik dari Q_i ke Q_{i+1}, iaitu nilai Q_i lebih kecil daripada nilai Q_{i+1} ($Q_i < Q_{i+1}$) sepanjang tembereng garis Q_iQ_{i+1} bagi setiap *i*.

iii. Bagi setiap i terdapat satu lintasan poligonal terhingga yang menggabungkan P_i dan $Q_{i\mu}$, yang μ adalah pilih atur 1, 2,..., n. Koordinat-z semakin menurun ketika menuruni lintasan dari titik P_i ke titik $Q_{i\mu}$.

iv. $a > b$ dan tiada persilangan di antara dua lintasan yang berlainan.

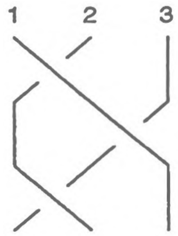
Jalinan yang menghubungkan P_i dan $Q_{i\mu}$ dinamai jalinan ke-i, dengan $a \leq i \leq n$. Menurut O'Connell (1995) di dalam tesis sarjananya, lintasan poligonal ditakrifkan sebagai lintasan yang merupakan kesatuan terhingga bagi tembereng garis lurus di dalam $\mathbf{R}^3$. Rajah 1.2 di bawah adalah contoh gambar rajah bagi tocang-n dan jalinan ke-i.



Rajah 1.2 Tocang-n dan jalinan ke-i

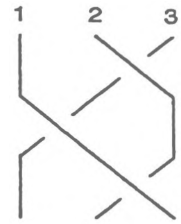
Sumber: Moran 1983

Andaikan α dan β adalah dua tocang-n yang berbeza. Maka α dan β dikatakan sama atau isotopik jalinan jika dan hanya jika terdapat perubahan bentuk yang berterusan dari satu tocang-n ke satu tocang-n yang lain yang mana syarat-syarat (i) hingga (iv) di atas dipenuhi semasa perubahan berlaku (Moran 1983; O'Connell 1995; Prasolov & Sossinsky 1997). Sebagai contoh, α dan β adalah isotopik jalinan jika dan hanya jika β didapati daripada beberapa perubahan bentuk yang berterusan dari α. O'Connell turut menambah, jika dua tocang adalah isotopik jalinan maka dua tocang ini berada di dalam kelas kesetaraan yang sama.



Rajah 1.3 α'

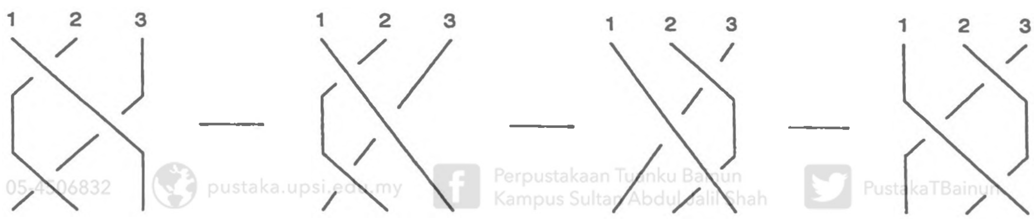
Sumber: O'Connell 1995



Rajah 1.4 β'

Sumber: O'Connell 1995

Rajah 1.3 dan 1.4 di atas memaparkan tocang-3 yang berbeza iaitu α' dan β'. Kedua-dua tocang-3 ini adalah jalinan isotopik. Ini kerana α' melalui beberapa perubahan dan menghasilkan β' seperti yang ditunjukkan oleh Rajah 1.5 di bawah.



Rajah 1.5 α' dan β' adalah jalinan isotopik

Sumber: O'Connell 1995

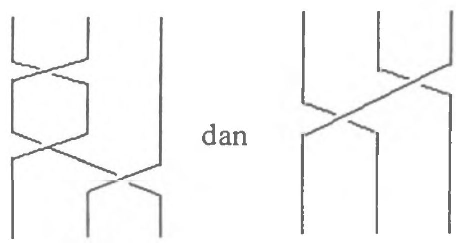
1.3 KUMPULAN TOCANG

Andaikan n suatu integer positif dan B_n adalah set bagi semua tocang-n. Menurut Moran (1983), B_n adalah kumpulan dengan mengambil kira jalinan isotopik sebagai hubungan kesetaraan dan B_n berada di bawah operasi pendaraban, mempunyai songsangan dan juga unsur identiti atau unsur unit.

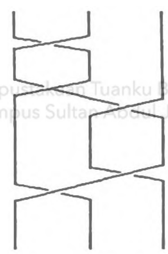
Andaikan α dan β adalah unsur-unsur di dalam B_n dan unsur-unsur ini mempunyai bilangan jalinan yang sama. Hasil darab dua tocang-n ini, $\alpha\beta$ diperoleh dengan meletakkan unsur β di bawah unsur α, dengan titik awalan bagi β bertepatan dengan titik akhiran bagi α (Moran 1983). Menurut Prasolov dan

Sossinsky (1997), unsur unit bagi set B_n adalah tocang-n yang semua n jalinan bagi tocang tersebut adalah menegak dan lurus. Ini bermakna unsur unit tidak mempunyai jalinan yang bersilangan. Tocang jenis ini juga dikenali sebagai tocang remeh.

Rajah 1.6 adalah gambar rajah bagi tocang-3 yang berlainan. Manakala Rajah 1.7 memaparkan hasil darab kedua-dua tocang-3 tersebut.



Rajah 1.6 Gambar rajah tocang-3 yang berlainan



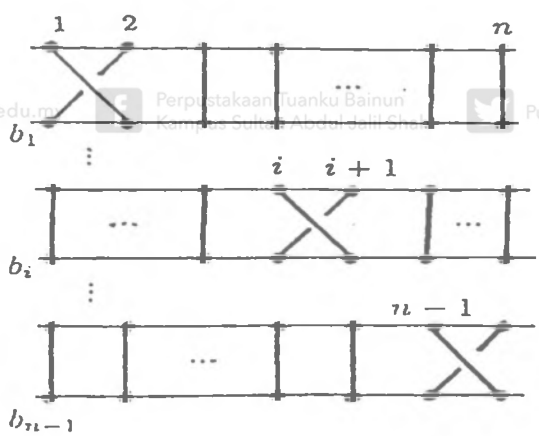
Rajah 1.7 Hasil darab tocang

Songsangan bagi kumpulan tocang-n pula adalah sesuatu yang mudah untuk dikenal pasti. Andaikan songsangan bagi tocang-n, B adalah B^{-1}. Tocang songsangan B^{-1} adalah imej cermin atau pantulan bagi B pada paksi $z = a_0$ yang a_0 adalah nombor nyata demikian sehingga B terletak di wilayah $z < a_0$ (Moran 1983). Secara ringkasnya, songsangan adalah imej cermin bagi tocang yang dipantulkan pada paksi mengufuk. Contoh bagi tocang-n dan songsangannya adalah seperti Rajah 1.8 di bawah yang tocang-n di sebelah kanan adalah songsangan bagi tocang-n di sebelah kiri.

Rajah 1.8 Tocang- n dan songsangannya

Sumber: Moran 1983

Kumpulan tocang boleh ditakrifkan oleh penjana. Suatu kumpulan tocang, B_n adalah hasil darab unsur-unsur $b_i^{\pm 1}$ atau songsangan bagi unsur-unsur tersebut. Unsur-unsur ini dikenali sebagai penjana. Gambar rajah bagi b_i adalah seperti Rajah 1.9 di bawah. Maka, unsur-unsur $b_1,\ldots,b_{n-1}$ adalah penjana bagi kumpulan tocang, B_n (Prasolov & Sossinsky 1997).



Rajah 1.9 Penjana bagi kumpulan tocang

Sumber: Prasolov & Sossinsky 1997

Kumpulan tocang Artin adalah kumpulan tocang yang dijanakan oleh set $\{b_1,\ldots,b_{n-1}\}$ berkenaan dengan dua hubungan yang dinyatakan di bawah;

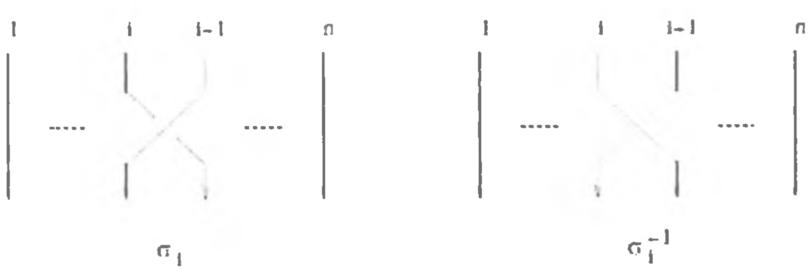
i. $b_i b_j = b_j b_i$ yang $|i-j| \geq 2$ (1.1)

ii. $b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}$ untuk semua $i = 1,\ldots,n-2$ (1.2)

Hubungan yang pertama dikenali sebagai kekalisan tukar tertib jauh. Hubungan pertama menerangkan secara ringkasnya, penjana saling tukar tertib apabila jalinan bagi penjana adalah jauh dengan jarak bagi jalinan adalah sekurang-kurangnya dua jalinan. Hubungan kedua dikenali sebagai hubungan tocang menunjukkan bahawa tocang $b_i b_{i+1} b_i$ dan tocang $b_{i+1} b_i b_{i+1}$ adalah isotopik jalinan (Prasolov & Sossinsky 1997). Oleh itu, menurut Murasugi (2008) kedua-dua hubungan ini dinamai sebagai hubungan asasi dan B_n mempunyai persembahan seperti di bawah;

$$B_n = \left(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, & |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & i = 1, 2, \ldots, n-2 \end{array} \right. \right)$$

Menurut Wang dan Hu (2009), tocang positif adalah unsur-unsur di dalam B_n^+, yang B_n^+ adalah suatu submonoid bagi kumpulan tocang demikian sehingga penjana-penjana yang menjana tocang positif terdiri daripada $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$. Monoid ialah satu subkumpulan yang mempunyai unsur identiti, e (Kuczkowski & Gersting 1977). Dehornoy (2008) turut menyatakan bahawa tocang positif boleh diwakili dengan sekurang-kurangnya satu penjana yang penjana tersebut adalah penjana positif. Secara ringkasnya, tocang positif adalah suatu tocang yang terdiri daripada penjana positif sahaja. Zou dan rakan-rakan (2006) juga menyatakan tocang positif boleh dicirikan sebagai tocang yang mempunyai persilangan positif, iaitu pada setiap titik persilangan jalinan, jalinan kiri ke kanan berada di bawah jalinan kanan ke kiri. Rajah 1.10 menunjukkan tocang positif di sebelah kiri dan tocang negatif di sebelah kanan yang persilangan berlaku pada jalinan ke-i.



Rajah 1.10 Tocang positif dan tocang negatif

Sumber: Garber 2009

1.4 PERKATAAN DAN MASALAH PERKATAAN

Lyndon dan Schupp (2001) menerangkan tentang perkataan di dalam buku mereka yang bertajuk Combinatorial Group Theory. Andaikan X adalah sebarang set tidak kosong. Perkataan W bagi set X boleh ditakrifkan sebagai jujukan terhingga huruf-huruf di dalam bentuk $x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}...x_n^{\varepsilon_n}$, yang x_i dengan $1 \leq i \leq n$ adalah unsur di dalam X, $n \geq 0$ dan $\varepsilon_1 = \pm 1$. Secara ringkasnya perkataan diwakili seperti berikut:

$$W = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}...x_n^{\varepsilon_n}.$$

Seterusnya, Lyndon & Schupp (2001) menjelaskan panjang bagi suatu perkataan $W = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}...x_n^{\varepsilon_n}$ adalah n dan boleh ditandakan sebagai $l(W) = n$. Jika panjang bagi perkataan adalah sifar, iaitu apabila $n = 0$, maka kita akan mendapat $W = 1$. Oleh itu, perkataan ini dinamai perkataan kosong. Andaikan U dan V adalah dua perkataan yang berlainan. Maka, jelaslah bahawa panjang bagi hasil darab U dan V adalah sama dengan hasil tambah panjang perkataan U dan panjang perkataan V. Secara matematiknya,

$$l(UV) = l(U) + l(V).$$

Baumslag (1993) menambah, jika panjang bagi hasil darab adalah seperti persamaan di atas, ianya menandakan tiada pembatalan huruf berlaku terhadap perkataan. Ianya boleh ditulis sebagai

$$\begin{aligned} U \Delta V &= l(UV) \\ &= l(U) + l(V) \end{aligned}$$

Selain itu, sekiranya panjang bagi hasil darab U dan V kurang daripada hasil tambah panjang U dan panjang V, ianya menandakan huruf terakhir bagi perkataan U membatalkan huruf pertama bagi perkataan V. Secara matematik,

$$l(UV) < l(U) + l(V)$$

dan boleh ditulis sebagai

$$\begin{aligned} U \sqcup V &= l(UV) \\ &< l(u) + l(V) \end{aligned}$$

Menurut Stillwell (1993), hasil darab dua perkataan, U dan V adalah rangkaian jujukan huruf bagi perkataan U dan V, iaitu dengan menulis perkataan U dituruti dengan perkataan V. Hasil darab U dan V boleh ditandakan sebagai UV. Sebagai contoh, andaikan

$$U = u_1^{\varepsilon_1} u_2^{\varepsilon_2} \ldots u_n^{\varepsilon_n}$$

dan

$$V = v_1^{\varepsilon_1} v_2^{\varepsilon_2} \ldots v_m^{\varepsilon_m},$$

maka hasil darab U dan V adalah,

$$UV = u_1^{\varepsilon_1} u_2^{\varepsilon_2} \ldots u_n^{\varepsilon_n} v_1^{\varepsilon_1} v_2^{\varepsilon_2} \ldots v_m^{\varepsilon_m}.$$

Selain itu, Lyndon & Schupp (2001) juga ada menyatakan, jika $W = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, maka songsangan bagi W adalah,

$$\begin{aligned} W^{-1} &= (W)^{-1} \\ &= (x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n})^{-1} \\ &= x_n^{-\varepsilon_n} \ldots x_2^{-\varepsilon_2} x_1^{-\varepsilon_1} \end{aligned}$$

Secara ringkasnya songsangan bagi W iaitu W^{-1} boleh dikatakan sebagai menulis semula huruf-huruf bagi W tetapi dengan susunan yang berlawanan dan dengan kuasa negatif, dengan huruf terakhir W menjadi huruf pertama W^{-1}, huruf kedua W menjadi huruf kedua akhir W^{-1} dan seterusnya.

Perkataan mengandungi dua jenis penjelmaan atau operasi asas, iaitu asas sisipan dan asas penghapusan. Asas sisipan adalah menyisipkan pasangan xx^{-1} ke dalam perkataan manakala asas penghapusan adalah menghapuskan pasangan xx^{-1} daripada perkataan (Lyndon & Schupp 2001).

Takrif 1.4.1 (Lyndon & Schupp 2001). Diberikan U dan V masing-masing adalah perkataan, maka U dan V adalah setara sekiranya terdapat rantaian operasi asas yang dapat menghasilkan V daripada U.

Ini bermaksud sekiranya V didapati setelah U mengalami beberapa asas sisipan atau asas penghapusan atau kedua-duanya, maka U dan V adalah setara. Oleh itu U dan V boleh ditulis sebagai $U \approx V$. Perkataan W adalah terturunkan sekiranya ianya tidak mengandungi pasangan xx^{-1} di dalamnya. Sekiranya perkataan masih lagi mengandungi pasangan xx^{-1}, maka dikatakan perkataan adalah tak terturunkan.

Masalah perkataan telah timbul sejak awal kurun ke-20 lagi. Lyndon & Schupp (2001) mengatakan pada tahun 1912, Dehn telah mengajukan persoalan mengenai masalah perkataan. Andaikan F adalah kumpulan bebas dengan asas X dan N adalah tutupan normal di dalam F bagi set R, dan G adalah kumpulan yang boleh digambarkan sebagai kumpulan hasil bahagi, $G = F / N$. Diberi persembahan kumpulan $G = (X; R)$ dan W_1 dan W_2 adalah dua unsur di dalam F. Masalah perkataan adalah untuk menentukan sama ada W_1 dan W_2 dapat menunjukkan unsur yang sama dengan menggunakan alkhwarizmi (Baumslag 1993; Lyndon & Schupp 2001). Jika alkhwarizmi tersebut boleh didapati, maka persembahan tersebut dikatakan masalah perkataan terselesaikan.

Masalah perkataan bagi kumpulan tocang adalah untuk menentukan sama ada dua perkataan tocang di dalam kumpulan tocang B_n adalah sama. Berikut merupakan beberapa takrif yang dinyatakan berkenaan dengan masalah perkataan bagi kumpulan tocang.

Takrif 1.4.2 (Dehornoy 1997). Masalah perkataan untuk kumpulan tocang adalah suatu masalah isotopi untuk tocang n jalinan.

Takrif 1.4.3 (Bangert 2009). Diberikan dua perkataan tocang a dan b yang $a,b \in B_n$, masalah perkataan adalah persoalan sama ada $a \approx b$.

Penyelesaian kepada masalah perkataan untuk kumpulan tocang boleh ditafsirkan dengan banyak cara. Sebagai contoh, Fenn, Keyman dan Rourke melalui Orevkov (2004) menyatakan bahawa jika α dan β adalah dua unsur di dalam monoid tocang tunggal adalah tak terturunkan dan $\iota(\alpha)=\iota(\beta)$ yang $\iota(\alpha)$ dan $\iota(\beta)$ masing-masing adalah permulaan bagi α dan β, maka $\alpha=\beta$.

Selain itu, Vershinin (2009) menghubung kaitkan monoid tocang songsang dengan kumpulan bebas. Monoid tocang songsang menerangkan struktur tocang yang jalinan-jalinan bagi tocang tersebut tidak tetap. Beliau menyatakan bahawa masalah perkataan untuk kumpulan tocang terselesaikan sekiranya dua perkataan tersebut mempunyai unsur-unsur monoid yang sama jika dan hanya jika kedua-dua perkataan menunjukkan pergerakan yang sama ke atas set terhingga bagi penjana kumpulan bebas, F_n.

Menurut Dehornoy (2008), secara umumnya terdapat dua kaedah untuk menyelesaikan masalah perkataan dalam kumpulan tocang, iaitu penyelesaian berasaskan bentuk normal dan juga pendekatan tidak berasaskan bentuk normal atau lebih dikenali sebagai kaedah langsung. Pendekatan berasaskan bentuk normal memerlukan setiap tocang di dalam kumpulan tocang diwakili dengan satu bentuk yang bitara, manakala pendekatan tidak berasaskan bentuk normal menyelesaikan masalah secara terus sama ada melalui kaedah sintaksis atau penyelesaian melalui geometri.

1.5 OBJEKTIF

Terdapat dua tujuan utama projek penyelidikan ini dijalankan, iaitu untuk:

i. mengkaji masalah perkataan yang wujud di dalam kumpulan tocang dan juga penyelesaian-penyelesaian yang telah dijalankan bagi menyelesaikan masalah ini.

ii. menyorot kajian-kajian lepas bagi melihat pendekatan yang digunakan untuk menyelesaikannya dan juga alkhwarizmi yang terhasil dari kajian tersebut.

1.6 SKOP KAJIAN

Sorotan kajian dibahagikan kepada dua bahagian. Bahagian pertama adalah menyorot kajian yang menggunakan bentuk normal sebagai satu kaedah untuk mendapatkan penyelesaian kepada masalah perkataan bagi kumpulan tocang. Terdapat dua kajian yang diperlihatkan di bahagian pertama, iaitu kajian yang dijalankan oleh Elrifai dan Morton serta Birman, Ko dan Lee. Pembuktian bagi teorem utama yang digunakan oleh Birman, Ko dan Lee diperjelaskan. Bahagian kedua adalah kajian yang menggunakan kaedah langsung sebagai cara penyelesaian. Kajian yang dipertimbangkan di dalam bahagian ini ialah kajian yang menggunakan kumpulan asasi. Seterusnya, contoh kepada penggunaan alkhwarizmi yang terhasil dari kaedah langsung ini diperlihatkan. Setiap langkah di dalam contoh ini diperinci dan ditunjukkan dengan sejelas yang mungkin.

1.7 RANGKA KAJIAN

Projek penyelidikan ini menjalankan sorotan terhadap kajian-kajian yang menggunakan dua pendekatan yang dinyatakan oleh Dehornoy (2008). Kajian yang menggunakan kaedah bentuk normal akan dinyatakan di dalam Bab II. Seterusnya, di dalam Bab III penyelesaian masalah perkataan untuk kumpulan tocang dengan menggunakan kumpulan asasi akan diperlihatkan. Bab IV menunjukkan contoh penggunaan alkhwarizmi yang terhasil daripada penggunaan kumpulan asasi. Akhir sekali, Bab V adalah rumusan dan kesimpulan bagi projek penyelidikan ini.